MET4 - Eksamen V18

Ved alle flervalgsoppgaver er minst ett svaralternativ riktig. På grunn av avrunding i mellomregninger kan du ha regnet riktig selv om du ikke finner svaret som et alternativ. Velg da det alternativet som er nærmest ditt svar. Kritiske verdier er hentet fra tabellene i læreboken. Dersom du ikke finner eksakt riktig antall frihetsgrader i tabellen, rund av til nærmeste oppgitte verdi.

Oppgave 1

Kursevalueringer er viktige verktøy når universiteter og høgskoler skal forbedre sitt undervisningstilbud. I en typisk evaluering vurderer studentene blant annet hvor fornøyd de er med kurset på en skala fra 1 til 5. I en studie fra 2005 samlet en gruppe forskere inn data fra 463 slike evalueringer ved et universitet i Texas, USA, og vi skal i denne oppgaven se nærmere på dette datasettet.

I tabellen under finner du deskriptiv statistikk for den gjennomsnittlige studentvurderingen for kurs med henholdsvis mannlig og kvinnelig foreleser.

Tabell 1: Deskriptiv statistikk

Kjønn	Min	Median	Max	Gj.snitt	St.avvik	Antall
Menn	2.1	4.15	5	4.07	0.56	268
Kvinner	2.3	3.9	4.9	3.9	0.54	195

(a) Test om studentevalueringen for menn og kvinner har lik varians på 5% signifikansnivå.

1. Hvilken test må vi benytte i dette tilfellet?

☐ Z-test (vi må slå opp i tabell for standard normalfordeling for å finne kritisk verdi)

☐ t-test (vi må slå opp i tabell for t-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ χ^2-test (vi må slå opp i tabell for kjikvadratfordelingen for å finne kritisk verdi)

☑ F-test (vi må slå opp i tabell for F-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ Wilcoxons rangsumtest

☐ Variansanalyse

2. Hva er verdien på testobservatoren?

☐ 1.01 ☐ 0.99 ☑ 1.08 ☐ 1.32 ☐ 0.76 ☑ 0.93

3. Hva er kritisk verdi for testen?

☐ 1.44 ☑ 1.32 ☐ 0.69 ☐ 2.19 ☑ 0.76 ☐ 0.85 ☐ 1.18

4. Hva er konklusjonen?

☑ Ikke forkast nullhypotesen om lik varians på 5% signifikansnivå

☐ Forkast nullhypotesen om lik varians på 5% signifikansnivå

Forklaring: Vi tester $\text{H}_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ mot $\text{H}_A : \sigma_1 \neq \sigma_2$. Testobservator er

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.56^2}{0.54^2} = 1.08.$$

Under nullhypotesen er testobservatoren F-fordelt med 267 og 194 frihetsgrader, som i tabellen må rundes av til 200 og 200. Kritisk verdi er dermed 1.32 (Husk tosidig!), og siden $1.08 < 1.32$, kan vi ikke forkaste nullhypotesen om lik varians. (Alternativt kan vi snu brøken og få $F = 0.54^2/0.56^2 = 0.93$, kritisk verdi blir $1/1.32 = 0.76$, og vi kan ikke forkaste nullhypotesen fordi $0.76 < 0.93$.)

(b) Test om studentevalueringen for menn og kvinner har lik forventning på 5% signifikansnivå.

1. Hvilken test må vi benytte i dette tilfellet?

☑ Z-test (vi må slå opp i tabell for standard normalfordeling for å finne kritisk verdi)

☑ t-test (vi må slå opp i tabell for t-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ χ^2-test (vi må slå opp i tabell for kjikvadratfordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ F-test (vi må slå opp i tabell for F-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ Wilcoxons rangsumtest

☐ Variansanalyse

2. Hva er verdien på testobservatoren?

☐ 5.94 ☐ 1.28 ☑ 3.28 ☐ 1.64 ☐ 3.01 ☐ 1.78 ☐ 2.28

3. Hva er kritisk verdi for testen?

☐ 1.28 ☐ 2.01 ☑ 1.96 ☐ 1.78 ☐ 2.28 ☐ 2.10 ☐ 1.58

4. Hva er konklusjonen?

☐ Ikke forkast nullhypotesen om lik forventningsverdi på 5% signifikansnivå

☑ Forkast nullhypotesen om lik forventningsverdi på 5% signifikansnivå

Forklaring: Vi gjennomfører en t-test for to populasjoner med lik varians (basert på resultatet i forrige oppgave). Vi estimerer det samlede standardavviket for alle observasjonene som

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(268 - 1) \cdot 0.56^2 + (195 - 1) \cdot 0.54^2}{268 + 195 - 2} = 0.304.$$

Testobservator er

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S_P^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{4.07 - 3.9}{\sqrt{0.304 \cdot \left(\frac{1}{268} + \frac{1}{195}\right)}} = 3.28.$$

Kritisk verdi for en tosidig t-test med $268 + 195 - 2 = 461$ frihetsgrader kan tilnærmes med tilsvarende verdi i en Z-tabell (med andre ord, unendelig antall frihetsgrader), og er 1.96.

Siden 3.28 > 1.96, forkaster vi nullhypotesen som lik forventet studentevaluering for menn og kvinner. (Dersom man gjorde feil i forrige oppgave og bruker test for forskjellig varians her blir resultatet nesten identisk. Testobservatoren har verdien 3.29 ["avrundingsfeil", jf instruksjoner], og antall frihetsgrader er 385 slik at kritisk verdi blir den samme.)

(c) *Normalfordelingen* er en viktig ingrediens i den statistiske analysen i spørsmål a og b. La $X_1, \ldots, X_n$ være et utvalg av stokastiske variable og la $\overline{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_n$. Merk av for alle riktige påstander:

☐ Fordelingen til de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$ nærmer seg normalfordelingen når n blir stor.

☑ Fordelingen til $\overline{X}_n$ nærmer seg normalfordelingen når n blir stor.

☑ Dersom n er stor kan vi på grunn av sentralgrenseteoremet benytte t-test for inferens om et gjennomsnitt, selv om observasjonene ikke er eksakt normalfordelt.

☐ Det er usikkerhet knyttet til om $X_1, \ldots, X_n$ er normalfordelt som gjør at aboluttverdien til kritisk verdi for t-testen er større enn absoluttverdi til kritisk verdi for Z-testen.

☑ Det er usikkerhet knyttet til verdien av standardavviket til $X_1, \ldots, X_n$ som gjør at aboluttverdien til kritisk verdi for t-testen er større enn absoluttverdi til kritisk verdi for Z-testen.

I forbindelse med denne studien ble en gruppe studenter bedt om å vurdere *utseendet* til hver foreleser på en skala fra 1 (dårligst) til 10 (best). I første omgang sorterer vi foreleserne i tre grupper basert på sitt utseende: under middels, middels, og over middels. I tabellen under finner du den prosentvise fordelingen av forelesere på de to kjennetegnene *kjønn* og *utseende*, samt de to marginale fordelingene.

Utseende/Kjønn	Mann	Kvinne	SUM
Under middels	0.21	0.11	0.33
Middels	0.22	0.18	0.4
Over middels	0.15	0.12	0.27
SUM	0.58	0.42	1

(d) Test om utseende og kjønn er uavhengige kjennetegn. Bruk 5% signifikansnivå.

1. Hvilken test må vi benytte i dette tilfellet?

☐ Z-test (vi må slå opp i tabell for standard normalfordeling for å finne kritisk verdi)

☐ t-test (vi må slå opp i tabell for t-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☑ χ^2-test (vi må slå opp i tabell for kjikvadratfordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ F-test (vi må slå opp i tabell for F-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ Wilcoxons rangsumtest

☐ Variansanalyse

2. I hvilket intervall befinner verdien til testobservatoren seg? (Merk at $[a, b)$ betyr intervallet fra og med a til, men ikke med, b).

☐ $[0, 0.1)$ ☐ $[0.1, 0.5)$ ☐ $[0.5, 1)$ ☑ $[1, 5)$ ☑ $[5, 10)$ ☐ $[10, 20)$ ☐ $[20, \infty)$

3. Hva er kritisk verdi for testen?

☐ 0.10 ☐ 1.69 ☐ 2.83 ☑ 5.99 ☐ 7.38 ☐ 12.6 ☐ 14.4

4. Hva er konklusjonen?

☑ Ikke forkast nullhypotesen om uavhengige kjennetegn på 5% signifikansnivå

☐ Forkast nullhypotesen om uavhengige kjennetegn på 5% signifikansnivå

Forklaring: I den oppgitte tabellen har vi de observerte frekvensene f_{ij}, der $i = 1, 2$ og $j = 1, 2, 3$. Vi regner ut *forventede* frekvenser under nullhypotesen, e_{ij}:

Utseende/Kjønn	Mann	Kvinne	SUM
Under middels	$0.33 \cdot 0.58 = 0.191$	$0.33 \cdot 0.42 = 0.139$	0.33
Middels	$0.58 \cdot 0.4 = 0.232$	$0.42 \cdot 0.4 = 0.168$	0.4
Over middels	$0.58 \cdot 0.27 = 0.157$	$0.42 \cdot 0.27 = 0.113$	0.27
SUM	0.58	0.42	1

Testobservatoren er gitt ved

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(0.21-0.191)^2}{0.191} + \frac{(0.11-0.139)^2}{0.139} + \frac{(0.22-0.232)^2}{0.232} + \frac{(0.18-0.168)^2}{0.168} + \frac{(0.15-0.157)^2}{0.157} + \frac{(0.12-0.113)^2}{0.113} = 0.01.$$

Under nullhypotesen er testobservatoren kjikvadatfordelt med $(2-1)\cdot(3-1) = 2$ frihetsgrader. Kritisk verdi på 5% nivå finner vi i Tabell 5, og er 5.99. Med $0.01 < 5.99$ kan vi ikke forkaste nullhypotesen (på langt nær).

Rettelse: Utregningen av testovservatoren over var gal. For å regne ut verdien på testobservatoren trenger vi først tabellen med observerte frekvenser (ikke andeler) som vi finner ved å multiplisere andelene med totalt antall observasjoner (463):

Utseende/Kjønn	Mann	Kvinne	SUM
Under middels	99	53	152
Middels	100	85	185
Over middels	69	57	126
SUM	268	195	463

På grunn av avrunding vil tallene variere noe avhengig av hvor mye man har avrundet underveis. Vi kan så regne ut det forventede antall under nullhypotesen, som blir tabellen vi regnet ut i den opprinnelige fasiten (over), også den multiplisert med 463:

Utseende/Kjønn	Mann	Kvinne	SUM
Under middels	$463 \cdot 0.33 \cdot 0.58 = 463 \cdot 0.191 \approx 88$	$463 \cdot 0.33 \cdot 0.42 = 463 \cdot 0.139 \approx 64$	152
Middels	$463 \cdot 0.58 \cdot 0.4 = 463 \cdot 0.232 \approx 107$	$463 \cdot 0.42 \cdot 0.4 = 463 \cdot 0.168 \approx 78$	185
Over middels	$463 \cdot 0.58 \cdot 0.27 = 463 \cdot 0.157 \approx 73$	$463 \cdot 0.42 \cdot 0.27 = 463 \cdot 0.113 \approx 52$	125
SUM	268	194	462

Igjen avvik pga avrunding. Vi kan nå regne ut den korrekte testobservatoren:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(99-88)^2}{88} + \frac{(53-64)^2}{64} + \frac{(100-107)^2}{107} + \frac{(85-78)^2}{78} + \frac{(69-73)^2}{73} + \frac{(57-52)^2}{52} = 5.05.$$

De fleste vil her få en testobseravtor under 5 pga avrunding (den korrekte verdien med alle desimaler hele veien er 4.45). Derfor vil begge intervallene $[1, 5)$ og $[5, 10)$ gi uttelling. Resten av svarene er fortsatt korrekt: kritisk verdi er 5.99, og vi får dermed ikke forkastning av nullhypotesen.

I tillegg til gjennomsnittlig tilfredshet, samt kjønn og utseende på foreleser, ble det i denne studien samlet inn flere kjennetegn for hvert kurs, og vi skal nå bruke regresjonsanalyse til å undersøke i hvilken grad disse forklarer variasjon i studentevalueringene. I tabellen under finner du en beskrivelse av variablene i datasettet vårt. Vi har totalt $N = 463$ observasjoner.

Tabell 2: Beskrivelse av variabler

Variabelnavn	Beskrivelse
`eval`	Gjennomsnittlig poeng på spørsmålet «Hvordan vil du vurdere dette kurset på en skala fra 1 til 5, der 1 er "svært lite tilfredsstillende" og 5 er "utmerket"?»
`minority`	Dummyvariabel som tar verdien 1 dersom foreleser er medlem av en minoritetsgruppe (dvs. er ikke-hvit).
`age`	Alder til foreleser.
`female`	Dummyvariabel som tar verdien 1 dersom foreleser er kvinne.
`beauty`	Seks bachelorstudenter har vurdert forelesers utseende på en skala fra 1 (dårlig utseende) til 10 (bra utseende). Variabelen i datasettet vårt er et gjennomsnitt av disse vurderingene, og standardisert slik at det totale gjennomsnittet er lik null.
`native`	Dummyvariabel som tar verdien 1 dersom foreleser har tatt sin høyere utdanning i et engelskspråklig land.

I en statistisk programpakke gjennomfører vi en multippel regresjon med `eval` som responsvariabel. Resultatet av analysen ser du i utskriften under.

```
Call:
lm(formula = eval ~ female + beauty + minority + native + age,
    data = kurs)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.87797 -0.35784  0.04323  0.37956  1.02073

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.928190   0.179292  21.909  < 2e-16 ***
female      -0.207452   0.052563  -3.947 9.17e-05 ***
```

```
beauty       0.140942   0.032938   4.279 2.29e-05 ***
minority    -0.044374   0.075725  -0.586  0.55817
native       0.313490   0.108630   2.886  0.00409 **
age         -0.002707   0.002750  -0.984  0.32545
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5324 on 457 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.08919,   Adjusted R-squared:  0.07922
F-statistic:  8.95 on 5 and 457 DF,  p-value: 4.001e-08
```

(e) Gi en kortfattet fortolkning av regresjonsutskriften over. Forklar spesielt betydningen av koeffisienten til `female` og `beauty`.

Variabelen `female` er en dummyvariabel, og vi estimerer at kvinner oppnår 0.21 poeng mindre enn menn på studentevalueringene, en klart signifikant effekt. Videre oppnår en foreleser 0.14 poeng ekstra hvor hver enhet variabelen `beauty` øker, også det en signifikant effekt. Vi kan påstå at disse to effektene er viktige i praksis, siden de utgjør henholdsvis $0.21/(5-2.1) = 7.2\%$ og $0.14/(5-2.1) = 4.8\%$ av variasjonsbredden til responsvariabelen `eval` (se Tabell 1 for tall). Av de tre siste koeffisientene er det bare `native` som er statistisk signifikant, som betyr at forelesere med utdanning fra et engelskspråklig land forventes å oppnå 0.31 flere poeng enn forelesere som ikke har sin utdanning i et engelskspråklig land.

Hvis vi ser bort fra `age`-koeffisienten (som likevel er svært liten og ikke-signifikant) har det estimerte konstantleddet på 3.93 en rimelig fortolkning som forventet score for en middels utseende mann, uten minoritetsbakgrunn og som er utdannet i et engelskspråklig land.

Justert R^2 er ikke så stor, bare 0.08. Det tyder på at modellen kun forklarer 8% av variasjonen i kursevalueringen, og at det er andre variable som forklarer mesteparten (som f.eks. hvor flink vedkommende er å forelese!)

(f) Kommenter kort diagnoseplottene til regresjonsanalysen, som er gitt i Figur 1.

Vi ser ikke tegn til heteroskedastisitet i residualplottet, og verken histogramet eller QQ-plottet viser dramatiske avvik fra normalitet. Vi ser dog at det er litt autokorrelasjon i residualene, som trolig skyldes at vi har observert flere kurs med samme foreleser, og at de ligger etter hverandre i datasettet vårt (*denne innsikten er ikke åpenbar ut fra informasjon i oppgaven og er ikke nødvendig for full pott*). Autokorrelasjon er dog ikke problematisk for fortolkning av koeffisienter eller prediksjonsformål, og signifikansen til `female` og `beauty` i forrige oppgave var såpass klar at vi fortsatt står inne for analysen vi gjorde der.

Du får oppgitt at minste og største observerte verdi av variabelen `beauty` er -1.45 og 1.97 henholdsvis.

(g) Bruk regresjonsmodellen over til å beregne forventet forskjell i studentevaluering for to forelesere med henholdsvis laveste og høyeste verdi av variabelen `beauty`, men som utover det er helt like.

1. Hva blir svaret?

☐ 0.08 ☐ 0.17 ☐ 0.32 ☑ 0.48 ☐ 0.61 ☐ 0.72 ☐ 1.03 ☐ 0.14

Forklaring: Predikert score er gitt ved regresjonsligningen

$$\texttt{eval} = 3.93 - 0.21 \cdot \texttt{female} + 0.14 \cdot \texttt{beauty} - 0.04 \cdot \texttt{minority} + 0.31 \cdot \texttt{native} - 0.003 \cdot \texttt{age},$$

og for to forelesere som er helt like bortsett fra forskjell i utseende vil forskjell i forventet score være gitt ved

$$\begin{aligned} \texttt{eval}_1 - \texttt{eval}_2 &= 0.14 \cdot 1.97 - 0.14 \cdot (-1.45) \\ &= 0.48. \end{aligned}$$

I en nylig offentliggjort stortingsmelding («Kultur for kvalitet i høyere utdanning») skriver Kunnskapsdepartementet tydelig at *undervisning skal versettes høyere* ved norske læresteder. Rektor ved en norsk høyskole har tatt til seg denne oppfordringen, og ønsker å bruke studentevalueringer som et (av flere) mål på undervisningskvalitet, som igjen skal brukes til å belønne gode forelesere med bonus og høyere lønn.

(h) Bruk analysene du har gjort over til å formidle eventuelt relevante funn til den aktuelle rektoren. Skriv et kort notat, vær *presis* og bruk *tall*.

Mulige poenger:

- Studentevalueringer kan fange opp andre ting enn bare undervisningskvalitet.
- Vil kjønn og utseende ha en indirekte innvirkning på avlønning gjennom slike evalueringer?
- Man kan kanskje også snu på det når det gjelder utseende: flinke forelesere vurderes penere? Da må isåfall studentene som vurderer utseende være kjent med undervisningen til vedkommende, noe som muligens ikke er tilfelle i denne studien.
- Flott poeng: Vi har tidligere funnet ut at kjønn og utseende ser ut til å være uavhengige kjennetegn, så det er neppe noen inetaksjonseffekt som vi ikke har testet ut.
- For full pott kreves minst en referanse til et **tall**, som påpekt i spørsmålsformuleringen.

Kilde: Hamermesh og Parker, *Beauty in the classroom: instructor's pulchritude and putative pedagogocal productivity*, Economics of Education Review (2005).

Oppgave 2

Den *effisiente markedshypotesen* sier at en investor ikke vil kunne tjene penger på å predikere aksjekurser, fordi prisen på en aksje på et gitt tidspunkt reflekterer all tilgjengelig informasjon om den videre prisutviklingen. Hvorvidt hypotesen holder i praksis har vært gjenstand for betydelig forskning de siste tiårene, og er til syvende og sist et empirisk spørsmål.

Vi skal i denne oppgaven se på noen ulike modeller for å predikere avkastningen i det norske aksjemarkedet på månedlig basis.

Vi begynner med å se på tidsrekken $r_{\text{NO},t}$ som representerer den månedlige avkastningen i prosent i den norske aksjemarkedet (Engelsk: Total market return) *utover* det man ville fått ved å sette pengene i banken (som historisk har vist seg å være en tilnærmet risikofri investering). Dersom vi for eksempel oppnår 2.1% avkastning i aksjemarkedet en måned, og den samme måneden ville fått 0.5% rente av banken, vil vi denne måneden observere $r_{\text{NO},t} = 0.021 - 0.005 = 0.016$.

Vi har observert avkastningen i det norske aksjemarkedet hver måned fra og med januar 1986 til og med februar 2018, totalt 385 måneder. I Figur 2 har vi plottet de estimerte autokorrelasjonene for denne tidsrekken. De blå stiplede linjene markerer grensen for når de estimerte autokorrelasjonene er signifikant forskjellig fra null på 95% signifikansnivå.

Vi ser i autokorrelasjonsplottet at den første estimerte autokorrelasjonen, $\widehat{\rho}_1$, såvidt er signifikant forskjellig fra null.

(a) Merk av for alle riktige påstander:

☐ Det kan se ut som at verdien av $r_{\mathrm{NO},t-1}$ påvirker utfallet av $r_{\mathrm{NO},t}$ kausalt.

☑ Det kan se ut som at $r_{\mathrm{NO},t-1}$ er korrelert med $r_{\mathrm{NO},t}$.

☑ Det er en svak tendens i tidsrekken at dersom $r_{\mathrm{NO},t-1}$ er stor, vil også $r_{\mathrm{NO},t}$ være stor.

☑ Det er en svak tendens i tidsrekken at dersom $r_{\mathrm{NO},t-1}$ er liten, vil også $r_{\mathrm{NO},t}$ være liten.

☑ Autokorrelasjonsplottet er forenelig med at $r_{\mathrm{NO},t}$ følger en MA(1)-prosess.

☑ Autokorrelasjonsplottet er forenelig med at $r_{\mathrm{NO},t}$ følger en AR(1)-prosess.

☐ Selv for en tidsrekke som består av uavhengige observasjoner, er ikke alle autokorrelasjoner nødvendigvis lik null.

☑ Dersom alle autokorrelasjonene til en tidsrekke er lik null kan det være snakk om hvit støy.

Forklaring: Fra autokorrelasjonsplottet ser vi at $r_{\mathrm{NO},t-1}$ og $r_{\mathrm{NO},t}$ er svakt positivt korrelert. Korrelasjon medfører som kjent ikke kausalitet, og ukorrelerthet medfører ikke uavhengighet. Autokorrelasjonene til en AR(1)-prosess vil gå eksponensielt mot null, noe som vi ikke kan utelukke ved å se på autokorrelasjonsplottet. For en MA(1)-prosess er $\rho_1 > 0$ og $\rho_k = 0$ for $k > 1$. Siden det bare er den første autokorrelasjonen i plottet som er signifikant forskjellig fra null, kan vi heller ikke utelukke at det er snakk om en MA(1)-prosess.

Rettelse: En rimelig lesning av den nest siste påstanden er «Selv for en tidsrekke som består av uavhengige observasjoner, er ikke alle *empiriske* autokorrelasjoner nødvendigvis lik null.» Denne påstanden er *sann* så her vil alle som har svart få poeng.

(b)

Vi ønsker å undersøke om vi kan predikere $r_{\mathrm{NO},t}$ én måned frem i tid, og setter opp en AR(1)-modell:

$$r_{\mathrm{NO},t} = \mu + \phi r_{\mathrm{NO},t-1} + u_t. \tag{1}$$

Her er μ og ϕ en ukjent parameter, og u_t er hvit støy med $\mathrm{E}(u_t) = 0$ og $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$.

1. Forklar hvorfor den første estimerte autokorrelasjonen $\widehat{\rho}_1$ er en naturlig estimator for den ukjente parameteren ϕ i ligning (1).

Hint: Betrakt AR(1)-prosessen som en enkel regresjonsmodell $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$, der $Y = r_{\mathrm{NO},t}$ og $X = r_{\mathrm{NO},t-1}$.

Her er vi liberal med å akseptere notasjon. Studentene her ikke anledning til å skrive formler.

Stigningstallet i en enkel regresjon estimeres som $\widehat{b} = \text{Cov}(X, Y)/\text{Var}(X)$, der X er forklaringsvariabelen og Y er responsvariabelen. Videre har vi at korrelasjonen mellom X og Y er definert som $\text{Cor}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)/(\text{SD}(X)\text{SD}(Y))$, med andre ord: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y)\text{SD}(X)\text{SD}(Y)$. Videre vet vi at $\text{Var}(X) = \text{SD}(X)^2$, så vi kan sette dette inn i formel for stigninstallet og få

$$\widehat{b} = \text{Cor}(X, Y) \cdot (\text{SD}(Y)/\text{SD}(X)).$$

Men X og Y representerer begge den samme tidsrekken, men som er forskjøvet med en periode: $X = r_{\text{NO},t-1}$ og $Y = r_{\text{NO},t}$. Altså er $\text{SD}(X) = \text{SD}(Y)$, og $\text{Cor}(X, Y)$ er den første autokorrelasjonen. Ved å sette dette inn i formelen over, får vi nettopp ut at minste kvadraters estimat for stigningstallet er gitt ved den første autokorrelasjonen:

$$\widehat{\phi} = \widehat{\rho}_1.$$

Oppdatering: Noen kandidater gav følgende korte og greie svar, som også gir full pott:

Autokorrelasjonsfunksjonen til en AR(1)-prosess er gitt ved $\rho_k = \phi^k$, og for $k = 1$ får vi følgelig $\rho_1 = \phi$. Derfor er den første estimerte autokorrelasjonen naturlig nok også en estimator for ϕ.

Uansett om du fikk til spørsmål 1 eller ikke, kan du nå ta for gitt at den første autokorrelasjonen $\widehat{\rho}_1$ er en naturlig estimator for ϕ.

2. Kan du ut fra dette resultatet og autokorrelasjonsplottet i spørsmål (a) vurdere om den effisiente markedshypotesen har vært oppfylt i det norske aksjemarkedet i den aktuelle tidsperioden?

Vi har altså at $\widehat{\phi} = \widehat{\rho}_1$, men i autokorrelasjonsplottet ser vi at $\widehat{\rho}_1$ er signifikant forskjellig fra null. Det ser altså ut som at vi kan bruke den estimerte AR(1)-modellen til å predikere $r_{\text{NO},t}$ ett steg frem i tid:

$$\widehat{r}_{\text{NO},t+1} = \widehat{\phi} r_{\text{NO},t} \neq 0,$$

noe som ikke er forenelig med den effisiente markedshypotesen. Her bør vi dog regne med å gjøre grundigere analyser før vi kan uttale oss med en viss autoritet.

En vanlig modell for å predikere avkastingen i det norske aksjemarkedet en måned frem i tid (utover den risikofrie renten) er å bruke den norske rentesatsen på kortsiktige statsobligasjoner (engelsk: treasury bills, symbol: $\text{bill}_{\text{NO},t}$ og aksjemarkedets utbytte (engelsk: dividend yield, symbol: $\text{d}_{\text{NO},t}$ i inneværende måned som forklaringsvariable i regresjonsmodellen

$$r_{\text{NO},t} = \beta_0 + \beta_1 \text{bill}_{\text{NO},t-1} + \beta_2 \text{d}_{\text{NO},t-1} + \epsilon_t. \tag{2}$$

Vi har månentlige data på disse variablene over den samme tidsperioden som over, som vi bruker til å estimere β_0, β_1 og β_2 ved hjelp av minste kvadraters metode i en statistisk programpakke. Estimatene finner du i Analyse (1) i regresjonstabellen gitt under:

(c) Vi ser at verken β_1 eller β_2 er signifikant forskjellige fra null i kolonne (1) i analysen over. Gjennomfør heller følgende test på 5% signifikansnivå: $\mathbf{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ mot $\mathbf{H}_A$: Minst én av koeffisientene er forskjellig fra null.

1. Hvilken test må vi benytte i dette tilfellet?

☐ Z-test (vi må slå opp i tabell for standard normalfordeling for å finne kritisk verdi)

Tabell 3

	Responsvariabel:	
	$r_{\text{NO},t}$	
	(1)	(2)
$\text{bill}_{\text{NO},t-1}$	-0.090	-0.065
	(0.092)	(0.092)
$d_{\text{NO},t-1}$	0.132	0.216
	(0.353)	(0.353)
$r_{\text{US},t-1}$		0.184^{**}
		(0.077)
Konstantledd	0.004	-0.001
	(0.014)	(0.014)
Ant. observasjoner	385	385
R^2	0.004	0.019
Justert R^2	-0.001	0.011
St. avvik residualer	0.068 (df = 382)	0.068 (df = 381)
F-observator	0.857 (df = 2; 382)	2.487^{*} (df = 3; 381)
Merknad:	«df» = «degrees of freedom», *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

☐ t-test (vi må slå opp i tabell for t-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ χ^2-test (vi må slå opp i tabell for kjikvadratfordelingen for å finne kritisk verdi)

☑ F-test (vi må slå opp i tabell for F-fordelingen for å finne kritisk verdi)

☐ Wilcoxons rangsumtest

2. I hvilket intervall ligger verdien på testobservatoren?

☐ $[0, 0.1)$ ☐ $[0.1, 0.5)$ ☑ $[0.5, 1)$ ☐ $[1, 5)$ ☐ $[5, 10)$ ☐ $[10, 20)$ ☐ $[20, \infty)$

3. I hvilket intervall ligger kritisk verdi for testen?

☐ $[0, 0.1)$ ☐ $[0.1, 0.5)$ ☐ $[0.5, 1)$ ☑ $[1, 5)$ ☐ $[5, 10)$ ☐ $[10, 20)$ ☐ $[20, \infty)$

4. Hva blir konklusjonen?

☑ Ikke forkast nullhypotesen om at begge regresjonskoeffisientene er lik null på 5% signifikansnivå.

☐ Forkast nullhypotesen om at begge regresjonskoeffisientene er lik null på 5% signifikansnivå

Forklaring: Det er denne testen som danner grunnlag for F-observatoren som er oppgitt i regresjonsutskriften. Det er altså snakk om en F-test, og verdien av testobservatoren er oppgitt i utskriften som 0.857. Antall frihetsgrader er også oppgitt: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 382$, så vi kan slå opp i F-tabellen for å finne kritisk verdi. Der finner vi at kritisk verdi ligger et sted mellom 3.04 ($\nu_2 = 200$) og 3.00 ($\nu_2 = \infty$). Følgelig kan vi ikke forkaste nullhypotesen.

(d)

I en studie som ble publisert i 2013 konkluderte en gruppe forskere at avkastningen i det *amerikanske* aksjemarkedet i måned t (som skrives $r_{\mathrm{US},t}$) er en viktig forklaringsvariabel for den påfølgende måneds avkastning i mange andre lands aksjemarkeder. Vi undersøker om dette også gjelder Norge ved å legge til $r_{\mathrm{US},t-1}$ som forklaringsvariabel i regresjonsmodellen fra forrige oppgave:

$$r_{\mathrm{NO},t} = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{bill}_{\mathrm{NO},t-1} + \beta_2 \mathrm{d}_{\mathrm{NO},t-1} + \beta_3 r_{\mathrm{US},t-1} + \epsilon_t. \tag{3}$$

Ved å bruke data over samme periode som tidligere i analysen kan vi estimere koeffisientene β_0, β_1, β_2 og β_3 i denne modellen ved hjelp av minste kvadraters metode. Resultatet ser du i kolonne (2) i regresjonsutskriften over.

Du får videre oppgitt at verdien av de tre forklaringsvariablene i den siste måneden i datasettet vårt er gitt som følger

	$\mathrm{bill}_{\mathrm{NO},t}$	$\mathrm{d}_{\mathrm{NO},t}$	$r_{\mathrm{US},t}$
$t =$ `FEBRUAR 2018`	0.0086	0.037	0.023

1. Anta at feilleddet ϵ_t i regresjonsmodellen over er normalfordelt, og at modellen sammen med koeffisientene i kolonne (2) i regresjonstabellen representerer den *sanne* sammenhengen mellom forklaringsvariablene og responsvariabelen. Bruk dette til å estimere sannsynligheten for at det i mars 2018 vil lønne seg å investere i en aksjeportefølje som følger den norske totalavkastingen, fremfor å sette pengene i banken.

I hvilket intervall ligger resultatet?

☐ $[0, 0.1)$ ☐ $[0.1, 0.2)$ ☐ $[0.2, 0.3)$ ☐ $[0.3, 0.4)$ ☐ $[0.4, 0.5)$ ☑ $[0.5, 0.6)$ ☐ $[0.6, 0.7)$ ☐ $[0.7, 0.8)$ ☐ $[0.8, 0.9)$ ☐ $[0.9, 1]$

2. Dersom du fikk til spørsmål 1, forklar med ord og evt. enkle formler hvordan du kom frem til svaret. Dersom du ikke fikk til spørsmål 1, gi likevel en kort forklaring på hvilke steg du mener må gjøres for å komme frem til riktig svar.

Vi bruker først koeffisientene i kolonne (2) til å predikere den norske totalmarkedsavkastningen for mars 2018:

$$\widehat{r}_{\mathrm{NO},t+1} = -0.001 - 0.065 \cdot 0.0086 + 0.216 \cdot 0.037 + 0.184 \cdot 0.023 = 0.0107.$$

Residualene har et estimert standardavvik på 0.068, så i følge vår regresjonsmodell predikerer vi at $r_{\mathrm{NO},t+1}$ vil bli trukket fra en normalfordeling med forventning 0.0107 og standardavvik 0.068. Aksjemarkedet lønner seg fremfor bankrenter dersom $r_{\mathrm{NO},t+1} > 0$, så vi kan regne ut $P(r_{\mathrm{NO},t+1} > 0)$ ved å standardisere:

$$\begin{aligned} P(r_{\mathrm{NO},t+1} > 0) &= 1 - P(r_{\mathrm{NO},t+1} < 0) \\ &= 1 - P\left(\frac{r_{\mathrm{NO},t+1} - 0.0107}{0.068} < \frac{0 - 0.0107}{0.068}\right) \\ &= P(Z < -0.157) = 1 - 0.4364 = 0.5636, \end{aligned}$$

der Z er en standard normalfordelt variabel, og vi finner den siste sannsynligheten i normaltabellen.

Dette var et formelt argument som viser utregningen. Det kreves ikke på dette spørsmålet siden den er vanskelig å vise formler. Det holder å forklare hvilke steg som trengs. Følgende svar gir full pott her:

Vi må først predikere avkastningen neste måned. Det gjør vi ved å sette tallene for februar 2018 inn i regresjonsmodellen, og bruke estimerte koeffisienter fra regresjonstabellen.

Da har vi predikert *forventet* avkastning. Det estimerte standardavviket henter vi også ut fra regresjonstabellen (0.068), og vi har estimert forventingen og standardavviket i normalfordelingen som neste måneds avkastning trekkes fra. Den lønner seg å investere i aksjemarkedet fremfor å sette pengene i banken dersom vi observerer $r_{\mathrm{NO},t+1} > 0$, og sannsynligheten for dette kan vi nå regne ut ved å standardisere variabelen til standard normal, og slå opp i normaltabellen i boken.

Apropos: i skrivende stund (april 2018) er resultatet for mars 2018 kommet, og vi observerte $r_{NO,\mathit{MARS\ 2018}} = 0.0271$.

(e)

Når vi tester om en estimert regresjonskoeffisient er signifikant forskjellig fra null, tester vi vanligvis nullhypotesen $\mathrm{H}_0 : \beta = 0$ mot det tosidige alternativet $\mathrm{H}_A : \beta \neq 0$ på 5% signifikansnivå. I forskningsrapporten som ligger til grunn for denne oppgaven gjennomfører man derimot *ensidige* tester $\mathrm{H}_0 : \beta = 0$ mot $\mathrm{H}_A : \beta > 0$ på 10% nivå.

1. På hvilken måte forandrer det utfallet av analysene vi har gjort i denne oppgaven?

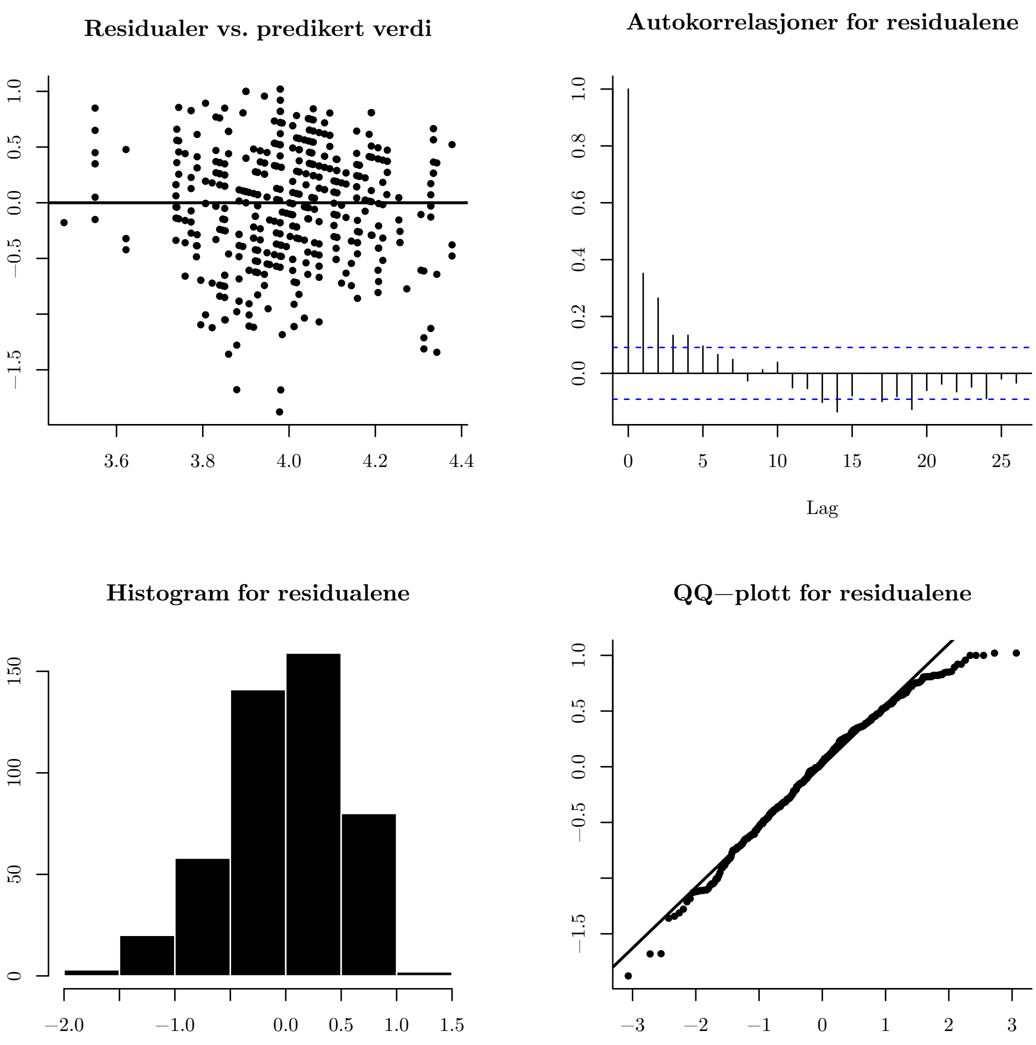
☑ Ved å gjennomføre ensidige tester på 10% signifikansnivå blir kritisk verdi for testene mindre; både fordi man samler all usikkerhet i øvre hale av normal- eller t-fordelingen, og fordi signifikansnivået er større. Det samme datamaterialet kan da potensielt gi *flere* forkastninger.

☐ Ved å gjennomføre ensidige tester på 10% signifikansnivå blir kritisk verdi for testene større; både fordi man samler all usikkerhet i øvre hale av normal- eller t-fordelingen, og fordi signifikansnivået er større. Det samme datamaterialet kan da potensielt gi *færre* forkastninger.

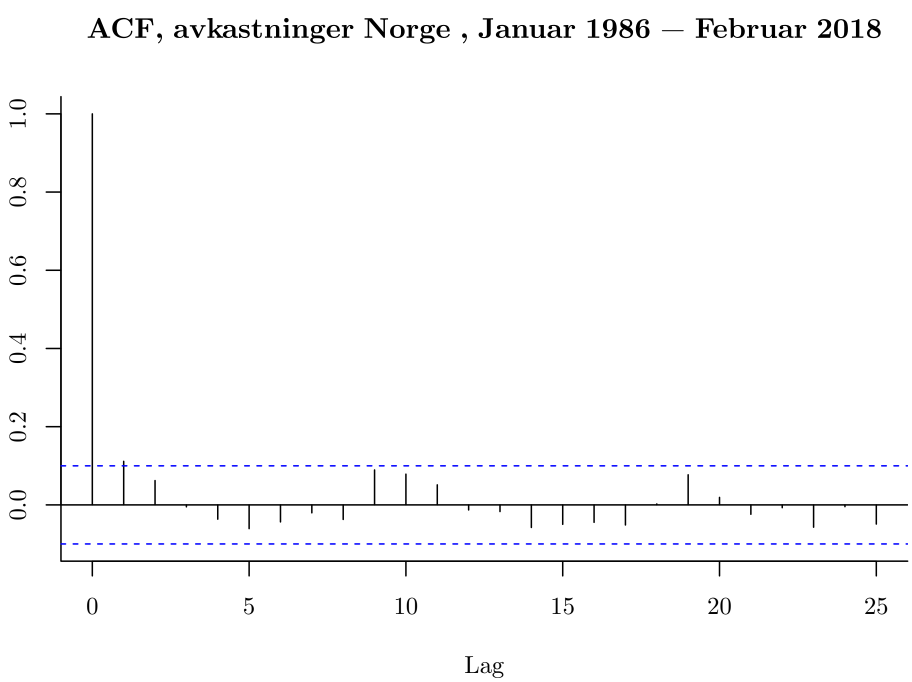
☐ Ved å gjennomføre ensidige tester på 10% signifikansnivå blir testresultatet nøyaktig det samme; å doble signifikansnivået, og å gjøre ensidige i stedet for tosidige tester har eksakt motsatt effekt for symmetriske fordelinger som normal- og t-fordelingen. Kritiske verdier forblir uforandret.

☐ Det vil være situasjonsbetinget. Vi har ikke nok informasjon til å svare generelt på dette spørsmålet.

Kilde: Rapach, Strauss og Zhou, *International Stock Return Predictability: What Is the Role of the United States?*, The Journal of Finance (2013).



Figur 1: Diagnoseplott for regresjonsanalysen i Oppgave 1.


ACF, avkastninger Norge , Januar 1986 − Februar 2018
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
5
10
15
20
25
Lag

Figur 2: ACF